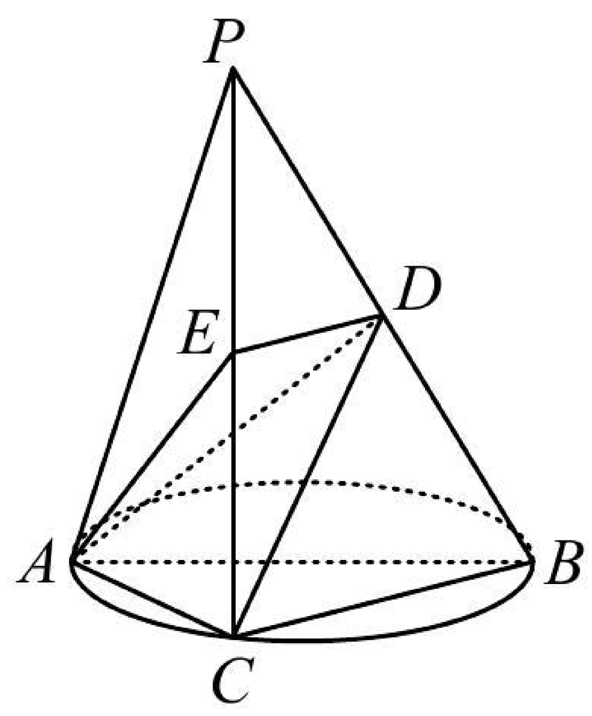
第 2 节 垂直关系证明思路大全（★★☆）

强化训练

1.（2023 • 成都模拟 • ★★）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，AB 是 ΔABC 的外接圆直径，PC 垂直于圆所在的平面，D，E 分别是棱 PB，PC 的中点，证明：$DE\perp$平面 PAC.

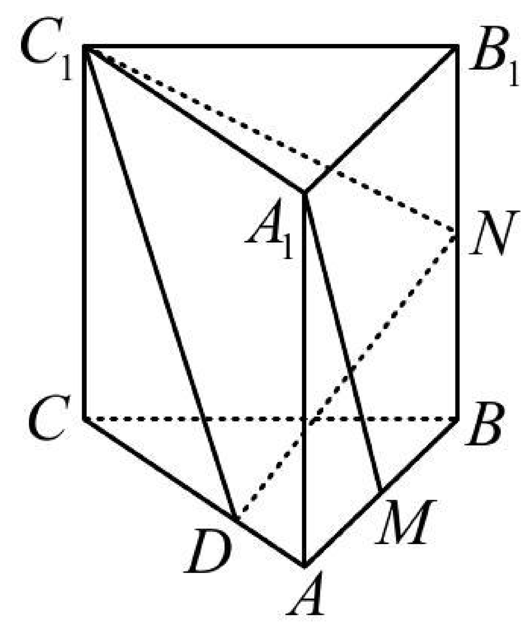


证明：（D，E 都是中点，联想到中位线，故可借助 $DE/\!/BC$ 把结论转化为证 $BC\perp$平面 PAC）

由题意，$PC\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，所以 $BC\perp PC$，又 AB 是 ΔABC 的外接圆直径，所以 $BC\perp AC$，因为 PC，$AC\subset$平面 PAC，$PC\cap AC=C$，所以 $BC\perp$平面 PAC，

又 D，E 分别是棱 PB，PC 的中点，所以 $DE/\!/BC$，故 $DE\perp$平面 PAC.

2.（2022 • 昆明模拟 • ★★）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1 为正方形，$\angle CAB=90^\circ$，$AC=AB=2$，M，N 分别为 AB 和 BB_1 的中点，D 为棱 AC 上的点，证明：$A_1M\perp DN$.



证明：（观察发现 A_1M 在面 ABB_1A_1 内，DN 在该面的投影好找，即为 AN，故由三垂线定理想到只需证 $A_1M\perp AN$）

如图，连接 AN，因为 $\angle CAB=90^\circ$，所以 $DA\perp AB$，又 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $AA_1\perp$平面 ABC，而 $DA\subset$平面 ABC，所以 $DA\perp AA_1$，结合 AB，AA_1 是平面 ABB_1A_1 内的相交直线可得 $DA\perp$平面 ABB_1A_1，因为 $A_1M\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $DA\perp A_1M$ ①，（再证 $AN\perp A_1M$，可在面 ABB_1A_1 内分析）

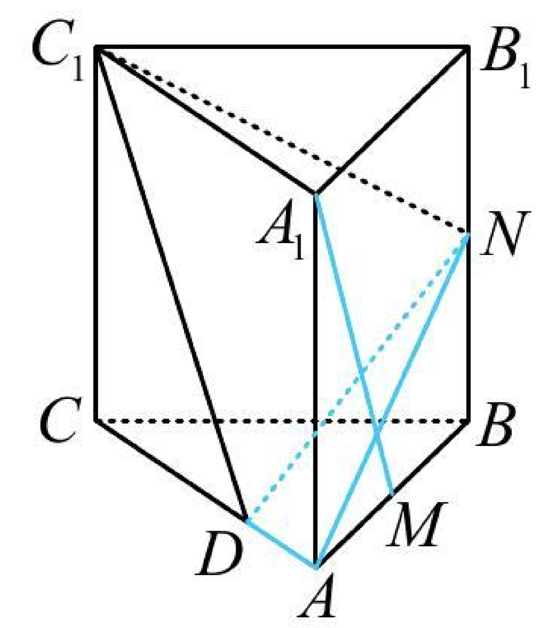
由题意，$AB=AA_1=2$，所以 ABB_1A_1 为正方形，故 $BN=AM=1$，

所以 $\tan\angle NAB=\dfrac{BN}{AB}=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle AA_1M=\dfrac{AM}{AA_1}=\dfrac{1}{2}$，故 $\angle NAB=\angle AA_1M$，

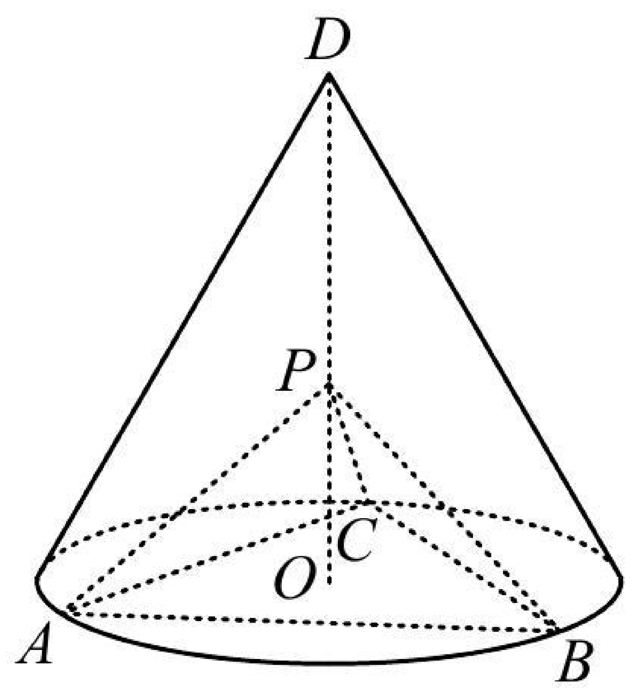
又 $\angle AA_1M+\angle AMA_1=90^\circ$，所以 $\angle NAB+\angle AMA_1=90^\circ$，故 $AN\perp A_1M$ ②，

由①②结合 DA，AN 是平面 DAN 内的相交直线可得 $A_1M\perp$平面 DAN，

又 $DN\subset$平面 DAN，所以 $A_1M\perp DN$.



3．（2020·新课标Ⅰ卷·★★）如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，ΔABC 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$\angle APC=90^{\circ}$，证明：平面 $PAB\perp$平面 PAC.



证法 1：（要证面面垂直，又已知交线，故只需在一个面内找与交线垂直的直线，它必垂直于另一个面，由 $\angle APC=90^{\circ}$可发现应选 PC，证 $PC\perp$平面 PAB 即可，而要证这一结果，还需证 PC 与 AB 或 PB 垂直，下面先考虑证 $PC\perp AB$，注意到 PC 在面 ABC 内的射影是 CO，故只需证 $AB\perp CO$）

如图 1，连接 CO 并延长，交 AB 于点 G，则 G 为 AB 中点，且 $AB\perp CG$，

由题意，$PO\perp$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，所以 $AB\perp PO$，又 CG，PO 是平面 POC 内的相交直线，

所以 $AB\perp$平面 POC，因为 $PC\subset$平面 POC，所以 $AB\perp PC$，

由题意，$\angle APC=90^{\circ}$，所以 $PA\perp PC$，又 PA，$AB\subset$平面 PAB，$PA\cap AB=A$，所以 $PC\perp$平面 PAB，

因为 $PC\subset$平面 PAC，所以平面 $PAB\perp$平面 PAC.

证法 2：（也可通过证 $PC\perp PB$ 来证 $PC\perp$平面 PAB，只需证 $\Delta PAC\cong\Delta PBC$，观察发现又只需证 $PA=PB$，要证这一结果，可通过证 $\Delta POA\cong\Delta POB$ 来完成）

如图 2，连接 OA，OB，则 $OA=OB$，由题意，$PO\perp$平面 ABC，OA，$OB\subset$平面 ABC，

所以 $PO\perp OA$，$PO\perp OB$，故 $\angle POA=\angle POB=90^{\circ}$，结合 $PO=PO$ 可得 $\Delta POA\cong\Delta POB$，所以 $PA=PB$，

又 ΔABC 是正三角形，所以 $AC=BC$，结合 $PC=PC$ 可得 $\Delta PAC\cong\Delta PBC$，所以 $\angle BPC=\angle APC=90^{\circ}$，

故 $PC\perp PB$，$PC\perp PA$，又 PA，$PB\subset$平面 PAB，$PA\cap PB=P$，所以 $PC\perp$平面 PAB，

因为 $PC\subset$平面 PAC，所以平面 $PAB\perp$平面 PAC.

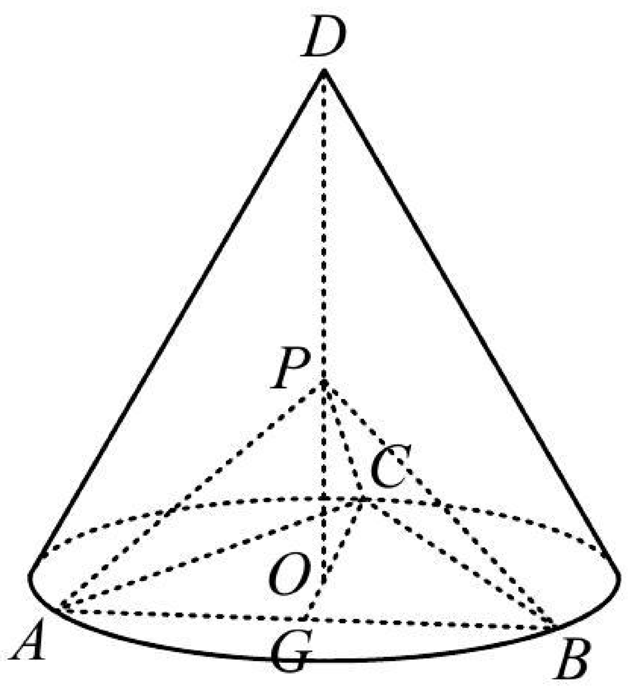


图1

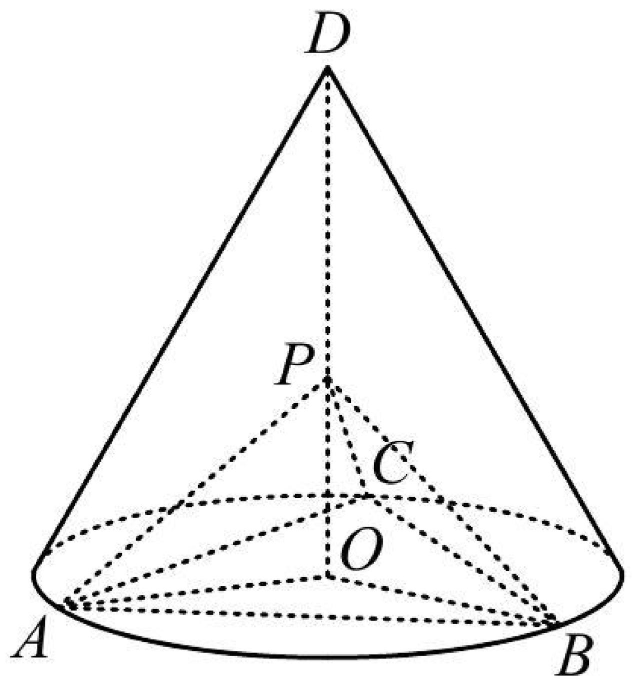
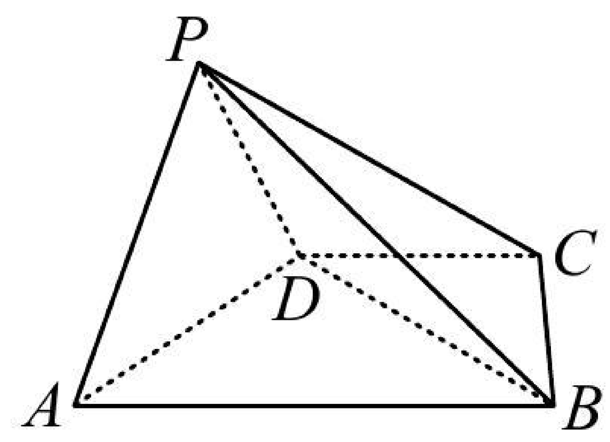


图2

4.（2023·榆林一模·★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$\angle DAB=60^\circ$，$PA\perp PD$，且 $PA=PD=\sqrt{2}$，$AB=2CD=2$，证明：$AD\perp PB$.

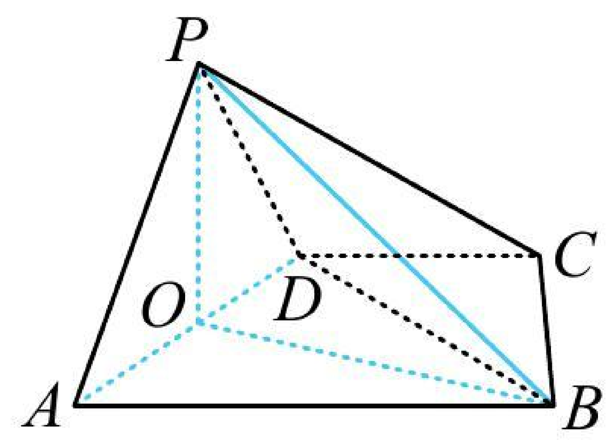


证明：（条件中有面 $PAD\perp$ 面 $ABCD$，可构造线面垂直，找到 PB 在平面 $ABCD$ 内的投影，结合三垂线定理，我们发现只需证 AD 与该投影垂直即可）

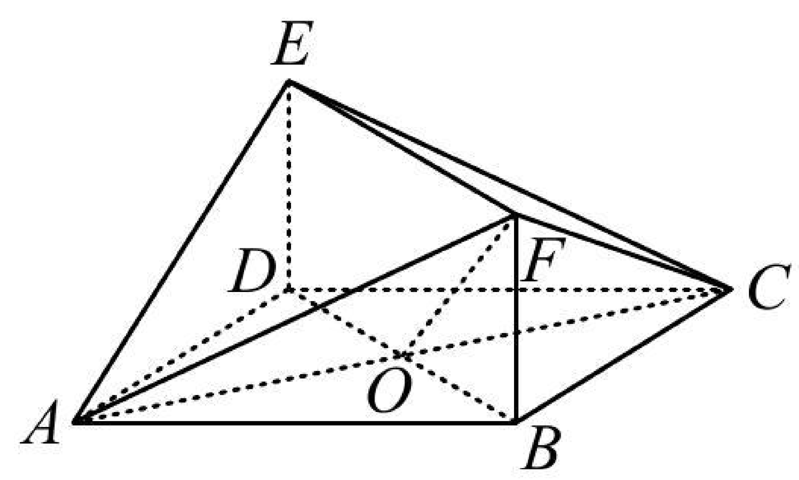
如图，取 AD 中点 O，连接 OP，OB，因为 $PA=PD=\sqrt{2}$，所以 $PO\perp AD$，又 $PA\perp PD$，所以 $AD=2$，

因为 $AB=2$，$\angle DAB=60^\circ$，所以 ΔADB 是正三角形，故 $AD\perp OB$，

因为 OP，$OB\subset$ 平面 POB，$OP\cap OB=O$，所以 $AD\perp$ 平面 POB，又 $PB\subset$ 平面 POB，所以 $AD\perp PB$.



5.（2023·吉林模拟·★★★）如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB=60^\circ$，四边形 $BDEF$ 为矩形，$BD=2BF=2$，AC 与 BD 交于点 O，$FA=FC$，证明：$DE\perp$ 平面 $ABCD$.



证明：（要证 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，需在面 $ABCD$ 内找两条相交直线与 DE 垂直，其中 BD 是给的，另一条选谁呢？AB，AD，还是 AC？观察发现应选 AC，因为条件中与 AC 有关的垂直较多，如菱形对角线垂直，故接下来证 $DE\perp AC$，若无思路，可考虑逆推法，假设 $DE\perp AC$，结合 $AC\perp BD$ 可知 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，所以通过证 $AC\perp$ 平面 $BDEF$ 来证 $AC\perp DE$，而要证这一线面垂直，除 $AC\perp BD$ 外，还可用 $FA=FC$）

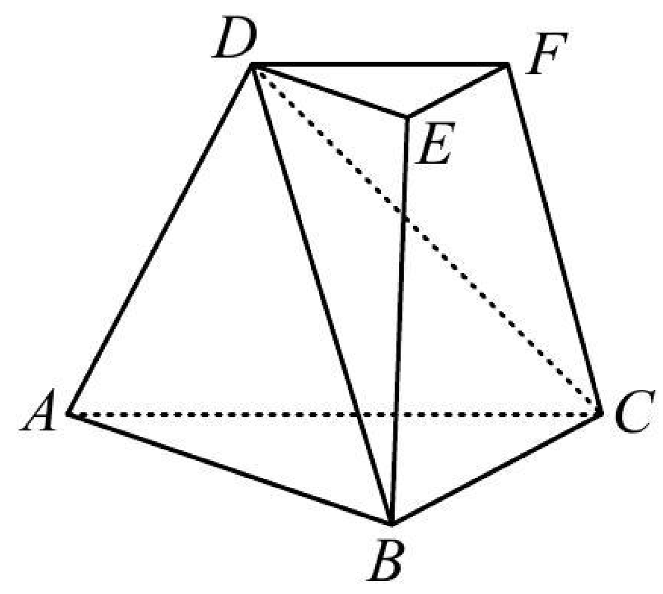
因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，且 O 为 AC 中点，又 $FA=FC$，所以 $AC\perp OF$，

因为 BD，$OF\subset$ 平面 $BDEF$，$BD\cap OF=O$，所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，又 $DE\subset$ 平面 $BDEF$，所以 $DE\perp AC$，

因为四边形 $BDEF$ 为矩形，所以 $DE\perp BD$，结合 BD，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\cap AC=O$ 可得 $DE\perp$ 平面

$ABCD$.

6.（★★★）如图，三棱台 $DEF-ABC$ 中，面 $ADFC\perp$面 ABC，$\angle ACB=\angle ACD=45^{\circ}$，$DC=2BC$，证明：$EF\perp DB$.



证明：（看到条件中有面 $ADFC\perp$面 ABC，马上想到作交线的垂线，构造线面垂直，不妨试试过 D 作 AC 的垂线）

过 D 作 $DG\perp AC$ 于 G，连接 BG，因为面 $ADFC\perp$面 ABC，面 $ADFC\cap$面 $ABC=AC$，

$DG\subset$面 $ADFC$，所以 $DG\perp$面 ABC，故 $DG\perp BG$，

（观察发现 $EF/\!/BC$，故可将要证的结论转化为证 $BC\perp BD$，于是考虑证 ΔBCD 满足勾股定理，题干给了一个长度关系，可由此设未知数分析）

设 $BC=a$，则 $DC=2a$，因为 $\angle ACD=45^{\circ}$，所以 ΔCDG 为等腰直角三角形，故 $CG=DG=\sqrt{2}a$，

在 ΔBCG 中，$\angle BCG=45^{\circ}$，由余弦定理，$BG^2=CG^2+BC^2-2CG\cdot BC\cdot\cos\angle BCG=a^2$，

所以 $BD^2=DG^2+BG^2=3a^2$，故 $BC^2+BD^2=4a^2=CD^2$，所以 $BC\perp BD$，

由三棱台结构特征可得 $EF/\!/BC$，所以 $EF\perp BD$.